

# Исследование виброударных режимов движения мобильного микроробота с электромагнитным приводом

А.Н.Гранкин, С.Ф.Яцун

*В данной работе предложена математическая модель вибрационного робота, движущегося по шероховатой горизонтальной поверхности. Движение робота происходит за счет периодического ударного движения внутренней массы. Модель включает в себя дифференциальные уравнения движения масс робота, уравнение электромагнитного привода, обеспечивающего перемещение внутренней массы.*

## Введение

Одним из активно развивающихся направлений исследований в механике является изучение и совершенствование различных способов движения мобильных объектов. В настоящее время наибольшее распространение получили роботы, использующие традиционные способы движения с применением дополнительных устройств (колес, гусениц и т.п.). Разрабатываются роботы для перемещения по узким трубам, и двигаться в плотных средах, таких как жидкости [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. В данной работе рассматривается вибрационный мобильный робот. Такие роботы могут передвигаться по шероховатой поверхности без колес, гусениц или ног, что особенно важно при миниатюрном исполнении роботов, а так же при необходимости обеспечения пошагового движения корпуса. Исследованию подобных систем посвящены работы [9, 10, 11]. В тоже время в этих статьях рассматривается движение робота без учета привода, вызывающего движение внутренней массы. Такой подход не позволяет исследовать характер движения робота для различных параметров управляющего электрического напряжения, а также выявить энергетические затраты робота, связанные с его движением, что особенно важно для автомобильных мобильных объектов.

Целью данной работы является исследование движения виброробота с учетом характеристик электромагнитного привода. Движение робота происходит за счет периодического ударного движения внутренней массы. При этом решаются следующие задачи: выбор схемы виброробота, построение математической модели системы, численное моделирование движения робота и определение основных зависимостей между характеристиками движения робота (средней скоростью) и параметрами управляющего напряжения.

## 1. Описание работа

Рассматриваемый робот представляет собой мехатронную систему, состоящую из механической, электрической и электронной частей. Схема виброробота показана на рис. 1. Виброробот состоит из платформы 1, на которой установлен корпус 2. Внутри корпуса 2 неподвижно расположен статор и обмотка электромагнита 3. Внутренняя масса (якорь) 5 подвешена на упругих элементах 4, которые являются направляющими для якоря и закреплены на корпусе 2. Амплитуда перемещения якоря 5 ограничена пружиной 6, установленной в сердечнике электромагнита 3. Робот перемещается по шероховатой поверхности 7.

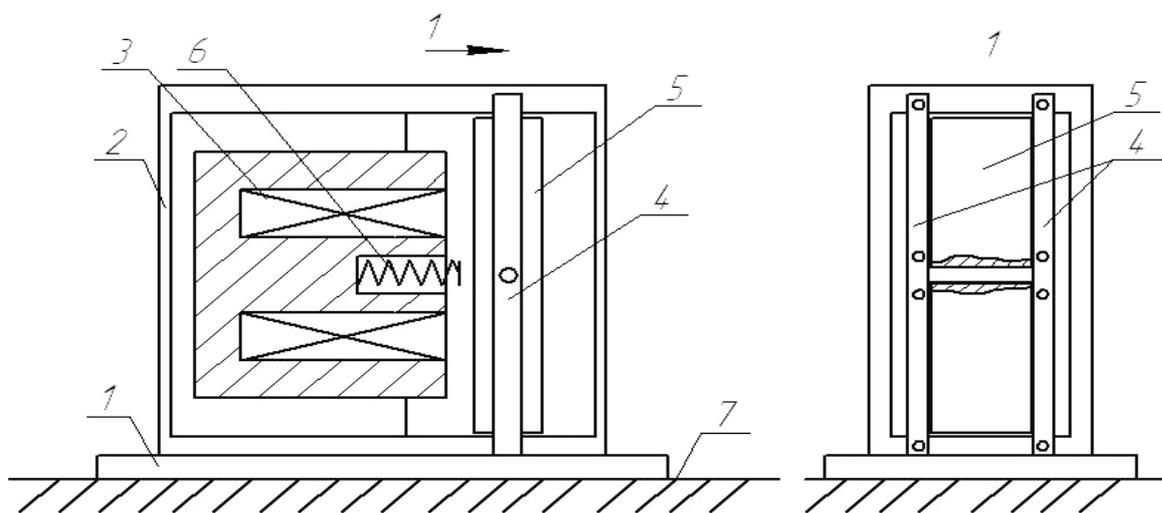


Рис. 1. Схема виброробота

При подаче периодического напряжения на обмотку электромагнита 3 возникает электромагнитная сила, под действием этой силы якорь 5 совершает колебательное движение. При контакте якоря с упруго-вязким ограничителем 6 происходит удар. Это приводит к значительному увеличению силы инерции, превышающему силу трения платформы 1 по поверхности 7, в результате этого корпус устройства совершает передвижение на один шаг. Таким образом, подбирая параметры электрического питания (амплитуду и частоту электрических импульсов) можно получить пошаговое прямолинейное движение робота.

## 2. Расчетная схема и математическая модель

Для моделирования движения робота рассмотрим расчетную схему, представленную на рис. 2.

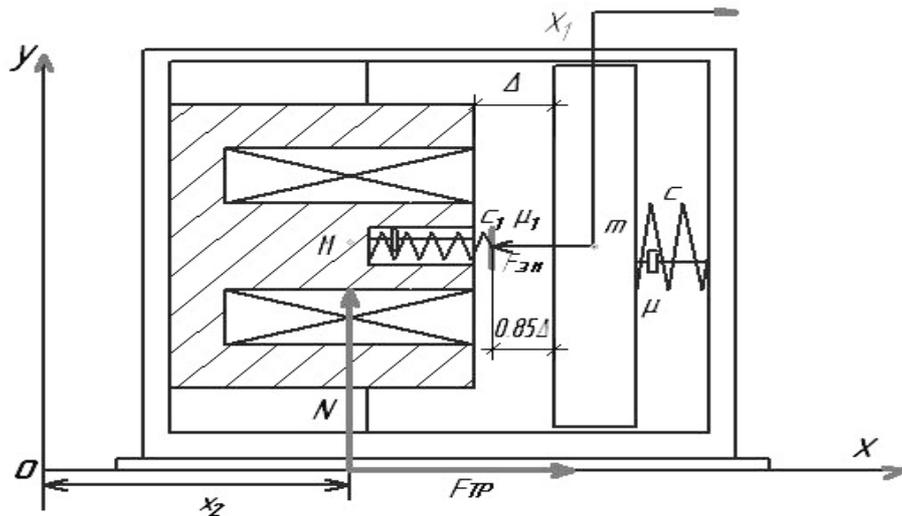


Рис. 2. Расчетная схема виброробота

Здесь приняты следующие обозначения:

$m$  – масса якоря,  $M$  – масса робота,  $c$  – жесткость пружины,  $\Delta$  – первоначальный зазор между магнитом и якорем,  $x_1$  – координата якоря относительно неподвижной системы координат  $XOY$ ,  $x_2$  – координата робота относительно неподвижной системы координат  $XOY$ ,  $F_{ЭМ}$  – электромагнитная сила, возникающая при подаче напряжения на магнит,  $N$  – сила нормальной реакции,  $F_{тр}$  – сила сухого трения корпуса робота по поверхности.

Будем рассматривать прямолинейное движение робота по горизонтальной шероховатой поверхности. За обобщенные координаты приняты перемещение якоря  $x_1$  и перемещение корпуса робота  $x_2$ .

На корпус робота действует внешняя сила – сила сухого трения  $F_{тр}$ . В качестве модели сухого трения принята модель, описанная в [12]. На графике, приведенном на рис.3, представлена зависимость силы трения от скорости.

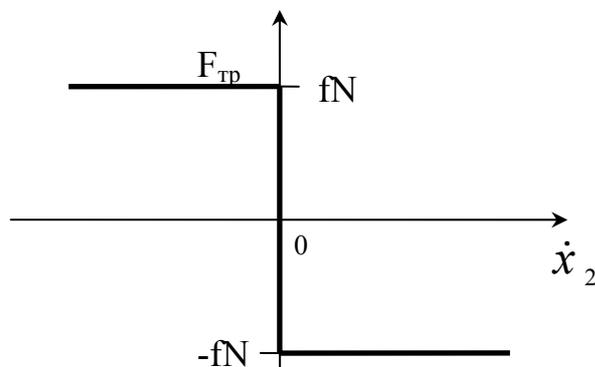


Рис. 3. Модель силы трения

Данную модель аналитически можно представить в виде:

$$F_{\text{тр}} = \begin{cases} -fN\text{sign}(\dot{x}_2), & \text{если } \dot{x}_2 \neq 0, \\ -F_0, & \text{если } \dot{x}_2 = 0 \text{ и } |F_0| \leq fN, \\ -fN\text{sign}(F_0), & \text{если } \dot{x}_2 = 0 \text{ и } |F_0| > fN \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $F_0$  – равнодействующая всех сил, кроме силы сухого трения, приложенного корпусу;  $N$  – нормальная составляющая силы, действующая на корпус со стороны плоскости опоры (сила нормального давления);  $f$  – коэффициент сухого трения,  $\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}$  – скорость робота.

Для рассматриваемой системы:

$$F_0 = \Phi_{\text{и}} \text{ и } N = Mg.$$

При ускоренном движении внутренней массы (якоря) возникает сила инерции  $\Phi_{\text{и}}$ , модуль которой равен:

$$\Phi_{\text{и}} = m \cdot \ddot{x}_1.$$

К внутренним силам, действующим в рассматриваемой системе, относятся сила упругости  $F_{\text{упр}}$  и сила вязкого сопротивления  $F_{\text{всопр}}$  [13, 14]. Сила упругости в данной системе кусочно-линейна. На рис. 4 представлена зависимость силы упругости от относительного перемещения якоря магнита:

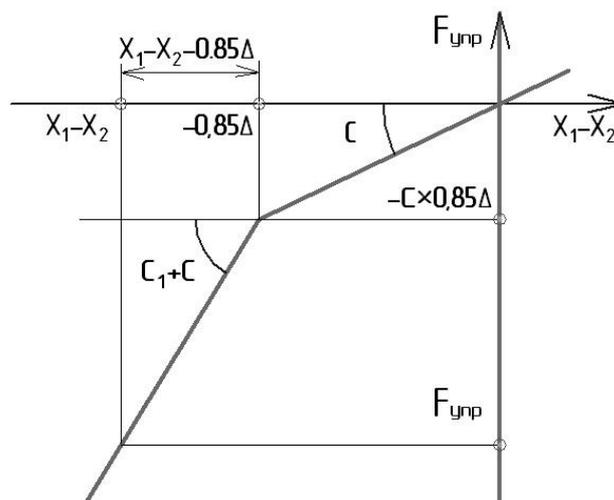


Рис. 4. Модель силы упругости

При относительном перемещении якоря больше, чем  $-0,85\Delta$ , коэффициент жесткости равен  $C$ , если же относительное перемещение якоря меньше  $-0,85\Delta$ , то коэффициент жесткости равен сумме  $C$  и  $C_1$ . Эмпирический коэффициент  $0,85$  выбран из условия отсутствия контакта якоря и магнитопровода.

Модель сил упругости и вязкого сопротивления аналитически можно представить в следующем виде:

$$F_{\text{упр}} = \begin{cases} c \cdot (x_1 - x_2), & (x_1 - x_2) > -0.85\Delta, \\ c \cdot (x_1 - x_2) + c_1 \cdot (x_1 - x_2 - 0.85\Delta), & (x_1 - x_2) < -0.85\Delta \end{cases} \quad (1.2)$$

$$F_{\text{всопр}} = \begin{cases} \mu \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2), & (x_1 - x_2) > -0.85\Delta \\ (\mu + \mu_1) \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2), & (x_1 - x_2) < -0.85\Delta \end{cases} \quad (1.3)$$

Где  $\mu, \mu_1$  При подаче напряжения на магнит возникает электромагнитная сила, притягивающая якорь, она определяется по формуле [13]:

$$F_{\text{эм}} = \frac{\Phi_1^2}{\mu_0 Z^2 S}, \quad (1.4)$$

где  $\Phi_1$  – магнитный поток;  $Z$  – число витков катушки,  $S$  – площадь воздушного зазора,  $\mu_0$  – магнитная проницаемость воздуха.

Дифференциальные уравнения, описывающие движение системы, имеют вид:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_2 = \Phi_i + F_{\text{ТР}} \\ m\ddot{x}_1 + F_{\text{всопр}} + F_{\text{упр}} = F_{\text{эм}}, \\ \dot{\Phi}_1 + i_1 R = U_1(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

где  $i$ ,  $R$  соответственно ток и активное сопротивление катушки.  $U_1(t)$  – управляющее напряжение.

С учетом (1.1, 1.2, 1.3, 1.4) система уравнений (1.5) может быть приведена к виду:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_2 = -m\ddot{x}_1 + \begin{cases} -fN\text{sign}(\dot{x}_2), & \text{если } \dot{x}_2 \neq 0, \\ -F_0, & \text{если } \dot{x}_2 = 0 \text{ и } |F_0| \leq kN \\ -fN\text{sign}(F_0), & \text{если } \dot{x}_2 = 0 \text{ и } |F_0| > kN \end{cases} \\ m\ddot{x}_1 = \frac{\Phi_1^2}{\mu_0 Z^2 S} - \begin{cases} c \cdot (x_1 - x_2) + \mu \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2), & (x_1 - x_2) > -0.85\Delta, \\ c \cdot (x_1 - x_2) + c_1 \cdot (x_1 - x_2 - 0.85\Delta) + (\mu + \mu_1) \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2), & (x_1 - x_2) < -0.85\Delta \end{cases} \\ \dot{\Phi}_1 = U_1(t) - i_1 R \end{cases} \quad (1.6)$$

Первые два дифференциальных уравнения описывают движение масс робота, а третье соответствует полному закону тока в электрической цепи катушки электромагнита.

### 3. Алгоритм моделирования

Рассмотрим движение системы при условии, что функция напряжения электрического питания  $U_1(t)$  задана в виде:

$$U_1 = \begin{cases} U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t), & \text{если } \sin(\omega \cdot t) > 0 \\ 0, & \text{если } \sin(\omega \cdot t) \leq 0 \end{cases}, \quad (1.7)$$

где  $U_0$ ,  $\omega$  – амплитуда и частота управляющего напряжения.

Начальные условия нулевые, то есть при  $t = 0$   $\dot{x}_1 = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = 0$ ,  $x_2 = 0$ .

Точное решение системы дифференциальных уравнений (1.6) в аналитическом виде не представляется возможным, так как в каждом из уравнений системы имеются нелинейные слагаемые. Поэтому воспользуемся численными методами решения дифференциальных уравнений. Производные функций  $F_{\text{упр}}(x_1 - x_2)$ ,  $F_{\text{всопр}}(x_1 - x_2)$  имеют точку разрыва при  $x_1 - x_2 = -0,85\Delta$ , а функция  $F_{\text{тр}}(\dot{x}_2)$  имеет разрыв в точке  $\dot{x}_2 = 0$ , поэтому для решения системы уравнений (1.6) необходимо использовать сложный алгоритм, позволяющий достаточно точно определить время прохождения точки разрыва.

Для реализации алгоритма интегрирования применяется специальная программа.

В этой программе используется численный метод, основанный на разложении искомой функции в ряд Тейлора. В этом методе искомая функция представляется в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,j+1} &= \dot{x}_{i,j} + \ddot{x}_{i,j} \cdot \Delta t \\ x_{i,j+1} &= x_{i,j} + \dot{x}_{i,j} \cdot \Delta t + \ddot{x}_{i,j} \cdot \frac{\Delta t^2}{2}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $\Delta t$  - адаптивный шаг по времени, уменьшающийся при приближении к точке разрыва,  $j$  – номер шага по времени,  $i = 1, 2$ .

Используя этот метод, на первом шаге интегрирования по заданным начальным условиям находят значения ускорений  $\ddot{x}_1$  и  $\ddot{x}_2$  по формулам из системы (1.6), затем находят значения скоростей и перемещений на этом шаге по формулам (1.8). На следующем шаге время увеличивается на  $\Delta t$  и, используя предыдущие значения ускорений, скоростей и перемещений, вычисляются действующие силы, значения которых подставляются в уравнения системы (1.6) для нахождения ускорений на новом шаге интегрирования. Этот цикл повторяется на протяжении всего времени интегрирования, при приближении к точкам разрыва шаг по времени многократно уменьшается, что позволяет определить время прохождения особой точки с любой заданной точностью.

При численном интегрировании системы уравнений (1.6) использовалась дискретная модель силы трения. Основным отличием этой модели от классической является то, что в ней точка переключения

одного уровня силы трения на другой (в кулоновской модели сухого трения) заменяется зоной переключения с интервалом  $(-\delta; +\delta)$ , где  $\delta$  – малое значение скорости, не равное нулю. Введение этого интервала позволяет гарантированно зафиксировать момент переключения силы трения (с плюса на минус или наоборот). Таким образом, дискретная модель сухого трения будет иметь вид:

$$F_{\text{тр}} = \begin{cases} -fN \text{sign}(\dot{x}_2), & \text{если } \dot{x}_2 > \delta \text{ или } \dot{x}_2 < -\delta \\ -F_0, & \text{если } |\dot{x}_2| < \delta \text{ и } |F_0| \leq kN \\ -fN \text{sign}(F_0), & \text{если } |\dot{x}_2| < \delta \text{ и } |F_0| > kN \end{cases}, \quad (1.9)$$

Когда скорость попадает в интервал  $(-\delta; +\delta)$ , движение тела прекращается, и сила трения определяется из условия равновесия тела. В интервале  $(-\delta; +\delta)$  скорость принудительно обнуляется. Графически систему (1.9) можно представить следующим образом:

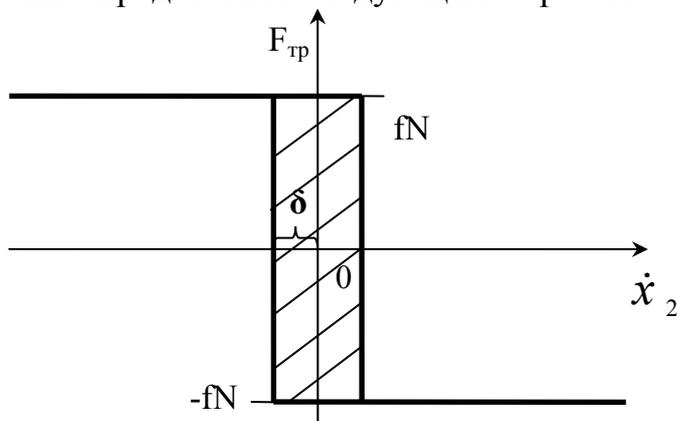


Рис. 5. Дискретная модель сухого трения

Движение робота происходит по следующему принципу. В начальный момент времени скорость корпуса робота равна нулю, при этом сила трения, действующая на тело, находится в интервале  $(fN...-fN)$  и равна равнодействующей всех сил, приложенных к корпусу. В нашем случае  $F_{\text{тр}} = -\Phi_{\text{и}}$ . Когда сила инерции становится больше по модулю, чем значение максимальной силы трения, тело приобретает ускорение, равное:

$$\ddot{x}_2 = \left\{ \Phi_{\text{и}} + \begin{cases} -fN \text{sign}(\Phi_{\text{и}}), & -\delta < \dot{x}_2 < \delta, \\ -fN \text{sign}(\dot{x}_2), & -\delta > \dot{x}_2 \text{ или } \dot{x}_2 > \delta, \end{cases} \right\} \cdot \frac{1}{M} \quad (1.10)$$

Перемещение робота происходит за счет несимметричной силы трения, возникающей из-за несимметричного закона перемещения  $x_2-x_1$ . Пока сила инерции больше по модулю, чем сила трения, тело движется в направлении силы инерции. Если сила инерции становится меньше, чем сила трения, то скорость тела уменьшается за счет отрицательного ускорения, рассчитываемого по формуле (1.10). В момент, когда

скорость робота становится равной нулю (входит в интервал  $(-\delta; +\delta)$ ), сила трения становится равной равнодействующей всех сил, в данном случае силе инерции  $F_{и}$  и по формуле (1.10) ускорение становится равным нулю. Таким образом, происходит остановка робота. Далее робот начинает движение только при выполнении условия  $F_{и} > F_{тр}$ .

Алгоритм интегрирования представлен на рис. 6. На первом шаге интегрирования происходит расчет электромагнитных сил, затем по формуле из системы (1.6) вычисляется ускорение якоря  $\ddot{x}_1$  и определяется сила инерции. Далее производится расчет силы трения и вычисляется ускорение робота, согласно принципам, описанным выше. По полученным значениям ускорений якоря и робота, вычисляются их скорости и перемещения. При малом шаге интегрирования этот алгоритм обеспечивает достаточную точность расчетов

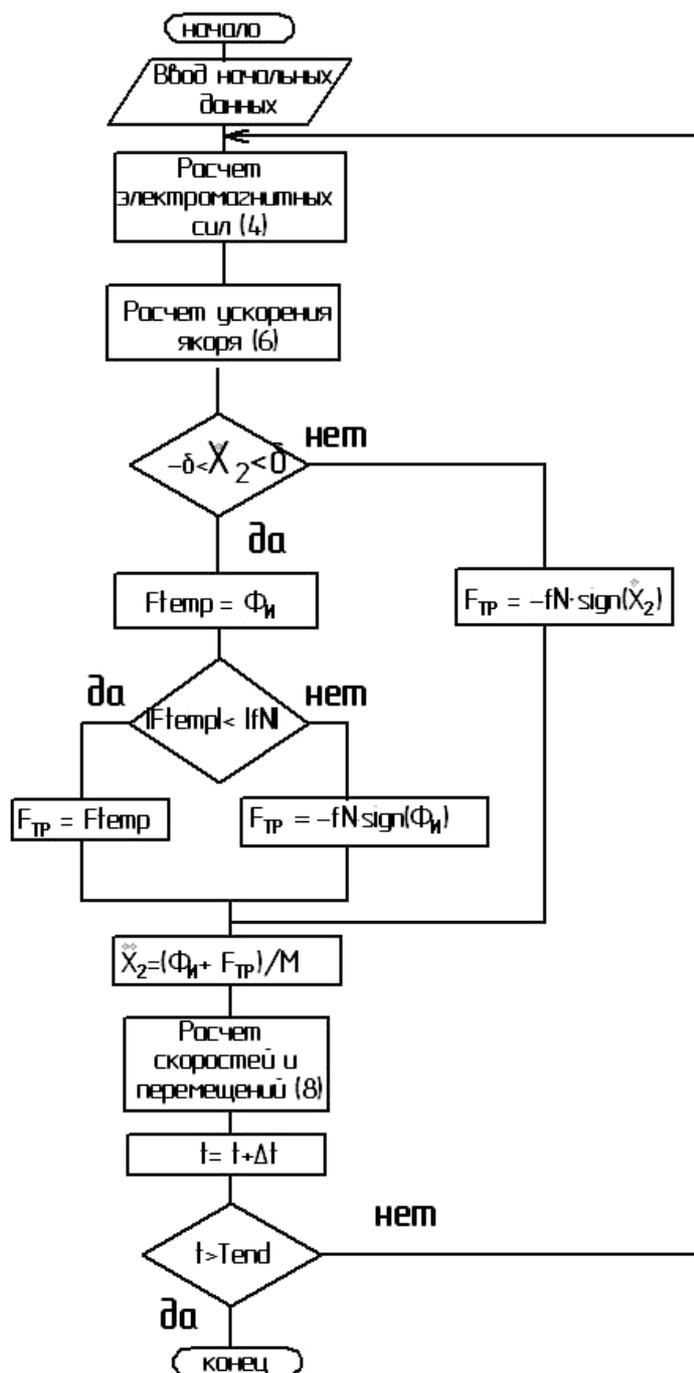


Рис. 6. Алгоритм расчетов системы дифференциальных уравнений (1.6)

#### 4. Результаты моделирования

Далее было проведено моделирование движения виброробота с целью определения влияния параметров виброробота на среднюю скорость объекта. Моделирование проводилось при заданных параметрах системы:  $m = 0,025$  кг;  $M = 0,1$  кг;  $c = 50$  Н/м;  $\mu = 0,5$  Нс/м;  $c_1 = 3000$  Н/м;  $\mu_1 = 10$  Нс/м;  $U_0 = 5$  В. Варьируемыми параметрами

выступали частота подаваемого напряжения  $\omega = 1..90$  рад/с и величина зазора между магнитом и якорем  $\Delta = 0,003..0,005$  м.

На рис. 7-9 представлены графики перемещения робота, абсолютного и относительного перемещения якоря и напряжения, подаваемого на магнит, при различных частотах для  $\Delta = 0,003$  м.

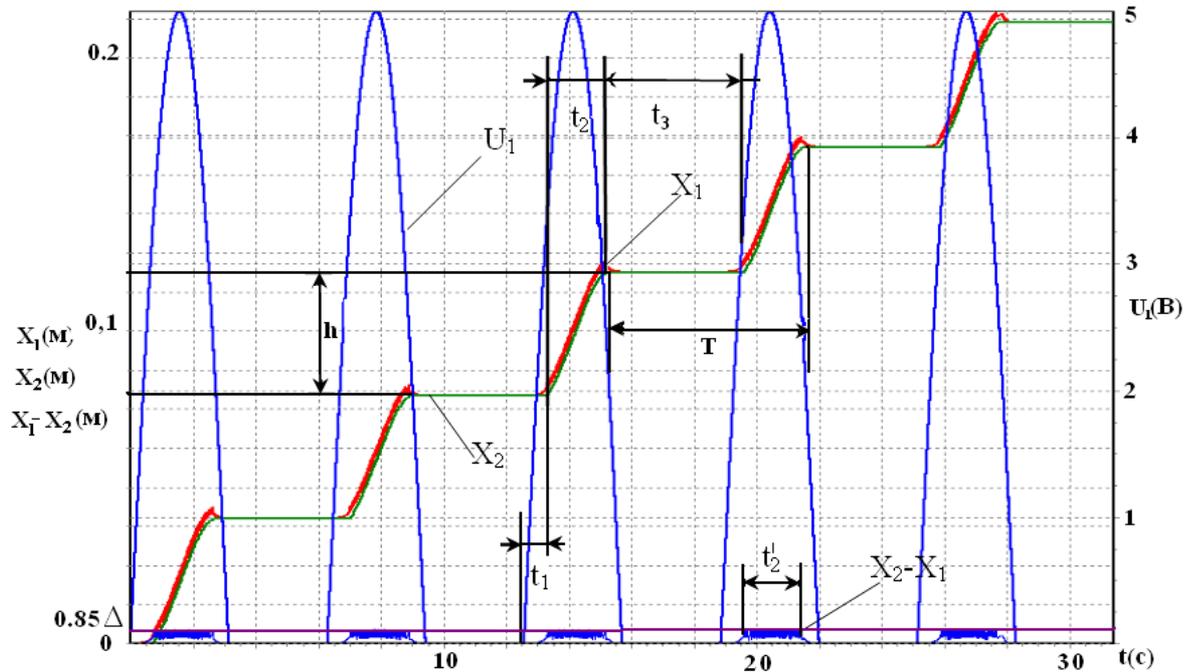


Рис. 7. Графики зависимости электрического напряжения  $U_1$ , абсолютного перемещения робота  $X_2$ , якоря  $X_1$  и относительного перемещения якоря  $X_2-X_1$  для  $\omega = 1$  рад/с при  $\Delta = 0,003$

Из графиков (рис. 7) видно, что корпус движется периодически с остановками. При этом время одного шага робота  $T$  равно периоду частоты подаваемого напряжения  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3.14}{1} = 6.28$  (с). Функция перемещения робота сдвинута относительно функции напряжения на отрезок времени  $t_1 = 0,5$  с, на этом отрезке скорость робота нулевая. Время одного шага робота равно  $T = t_2 + t_3$ , где  $t_2 = 2$  с – время нарастания координаты  $X_1$ ,  $t_3 = 4.28$  с – время остановки, на этом отрезке скорость робота остается равной нулю до следующей подачи напряжения на магнит. Движение робота на отрезке  $t_2$  происходит практически равномерно. Средняя скорость на этом участке при этом равна:

$$V_M = \frac{h}{t_2} = \frac{0.0375}{2} = 0.019 \text{ (м/с)}, \quad (1.11)$$

где  $h$  – расстояние, которое проходит робот за один шаг.

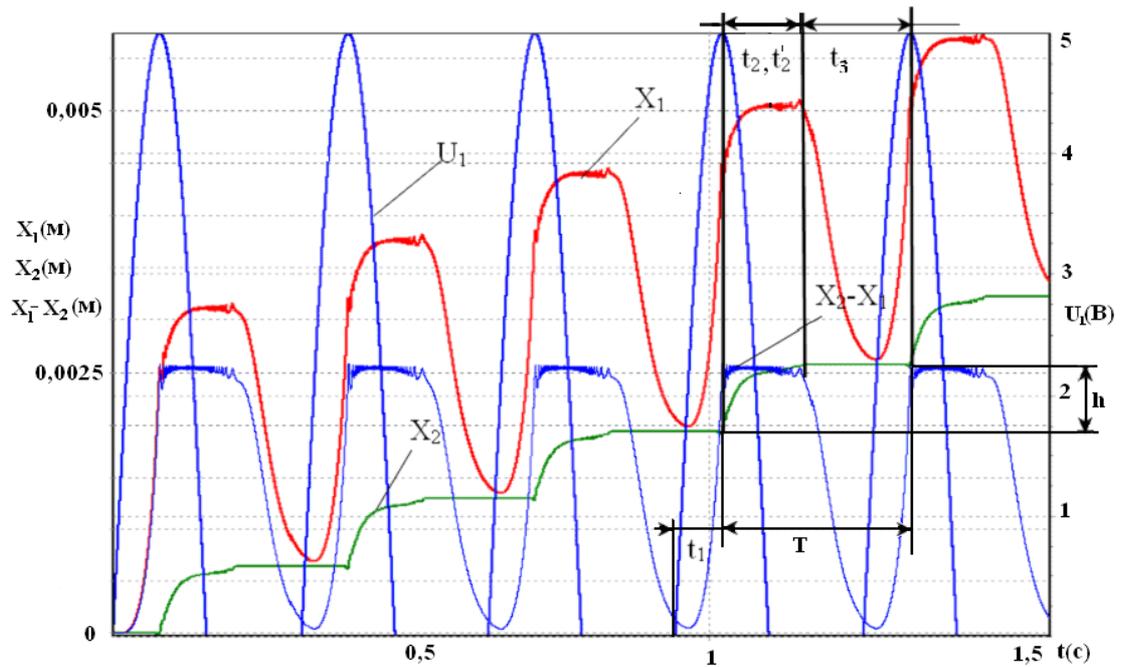


Рис. 8. Графики зависимости электрического напряжения  $U_1$ , абсолютного перемещения робота  $X_2$ , якоря  $X_1$  и относительного перемещения якоря  $X_2-X_1$  для  $\omega = 20$  рад/с

Из графиков (рис. 8) видно, что движение происходит аналогично предыдущему случаю. Время одного шага робота равно  $T = 0.314$  с, что совпадает с частотой подаваемого напряжения. Значение времени сдвига с увеличением частоты уменьшается и составляет  $t_1 = 0.1$  с. Время нарастания скорости  $t_2 = 0.114$  с, время остановки  $t_3 = 0.2$  с. За один шаг корпус перемещается на  $h = 0.0007$ , скорость при этом  $V_M = 0.0061$ . При увеличении частоты подаваемого напряжения, мгновенная скорость уменьшается, но увеличивается количество шагов робота за определенный интервал времени. Дальнейшее увеличение частоты приводит к тому, что средняя скорость робота уменьшается до нуля (см. рис. 9). При этом внутренняя масса колеблется с частотой внешнего периодического воздействия  $T = 0,069$ с., а корпус робота остается на месте.

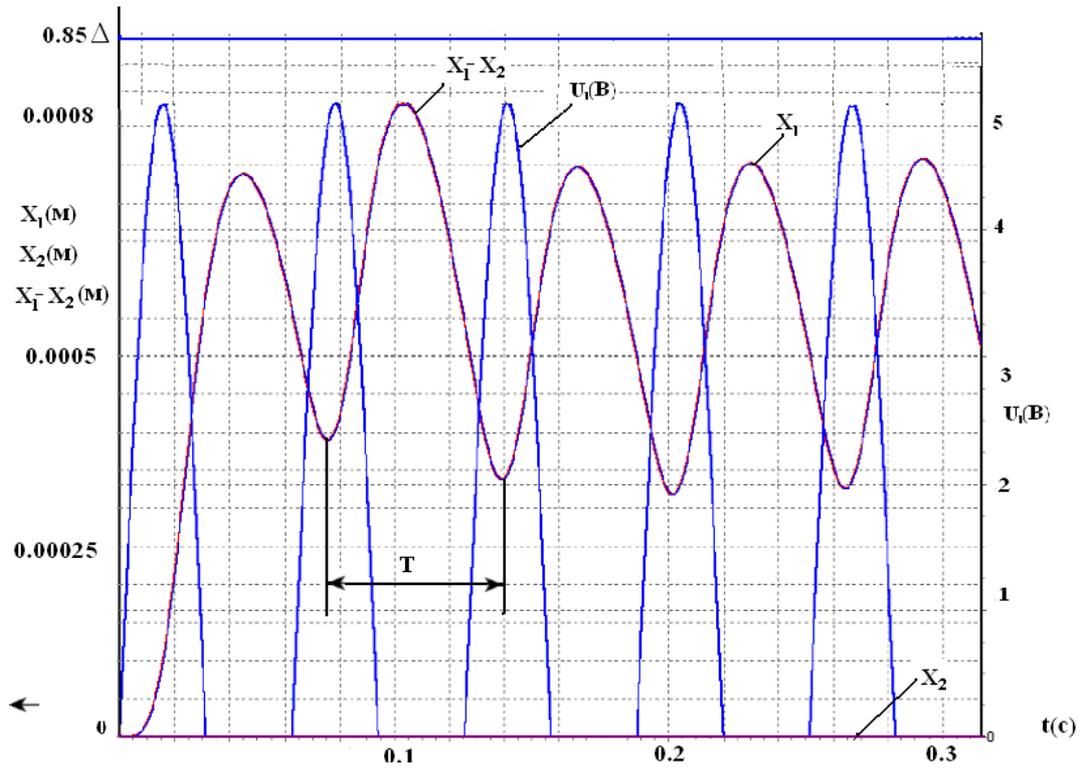


Рис. 9. Графики зависимости электрического напряжения  $U_1$ , абсолютного перемещения робота  $X_2$ , якоря  $X_1$  и относительного перемещения якоря  $X_2 - X_1$  для  $\omega = 90$  рад/с

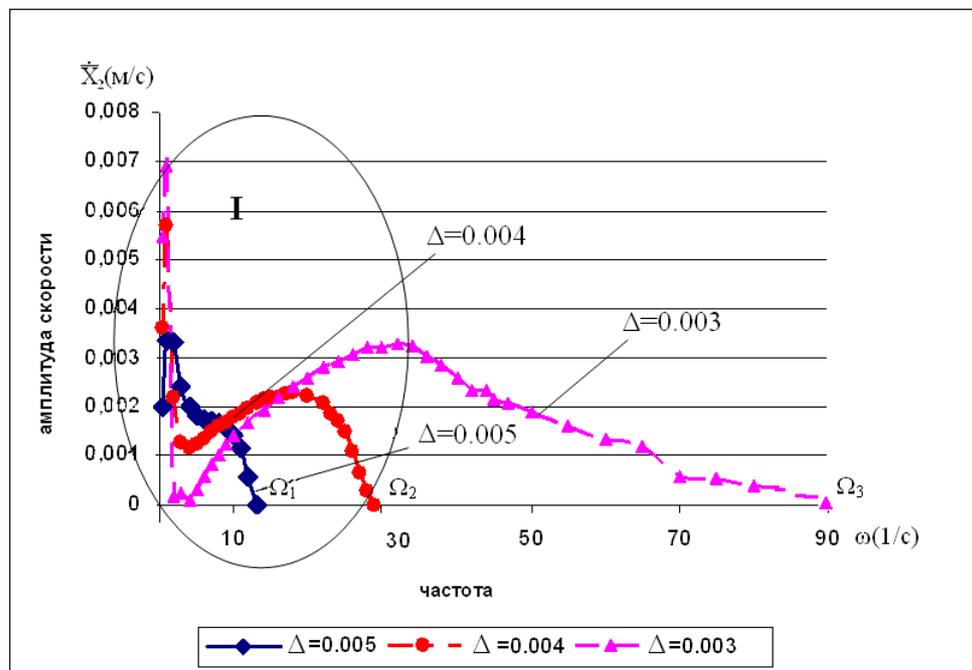


Рис.10. Зависимость средней скорости робота для различных зазоров.

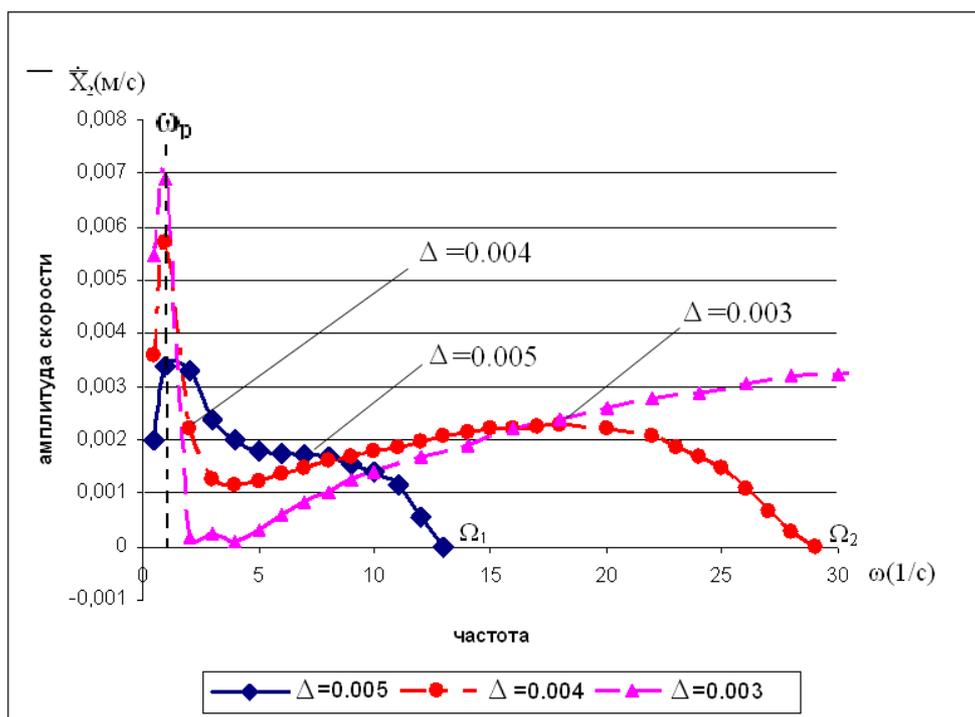


Рис.11. Зависимость средней скорости робота для различных зазоров в области низких частот (область I).

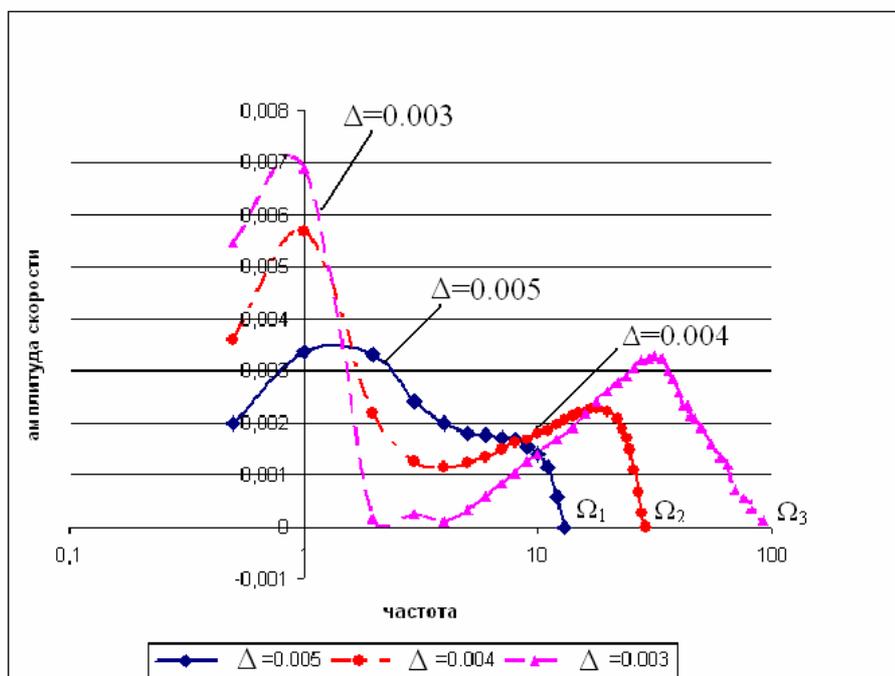


Рис.12 Логарифмическая зависимость средней скорости робота от частоты.

Влияние зазора на величину средней скорости робота

$$\bar{\dot{X}}_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{X}_2 dt$$

удобно изучать на диаграмме, иллюстрирующей зависимость средней скорости от частоты электрического питания при различных значениях воздушного зазора (смотри рис.10-12). Наиболее существенно, средняя скорость робота изменяется в области низких частот, поэтому для детального изучения поведения системы на рис.11 показана диаграмма только для низкочастотной области. Кроме этого, эта же диаграмма перестроена в логарифмической системе координат и представлена на рис.12. Из графиков (рис.10-12) видно, что с ростом частоты средняя скорость робота падает и при некоторой предельной частоте  $\Omega$  стремится к нулю. Значение предельной частоты  $\Omega$  зависит от величины зазора  $\Delta$ . В тоже время, с увеличением зазора диапазон частот, в котором робот имеет ненулевую среднюю скорость, сужается. Так для зазора  $\Delta = 0.003$  м частота  $\Omega$ , при которой движение робота прекращается приблизительно равна 90 рад/с. Для  $\Delta = 0.004$  м -  $\Omega = 30$  рад/с, а для  $\Delta = 0.005$  м получаем  $\Omega = 14$  рад/с. На рис.13 приведена зависимость предельной частоты  $\Omega$  от величины зазора  $\Delta$ .

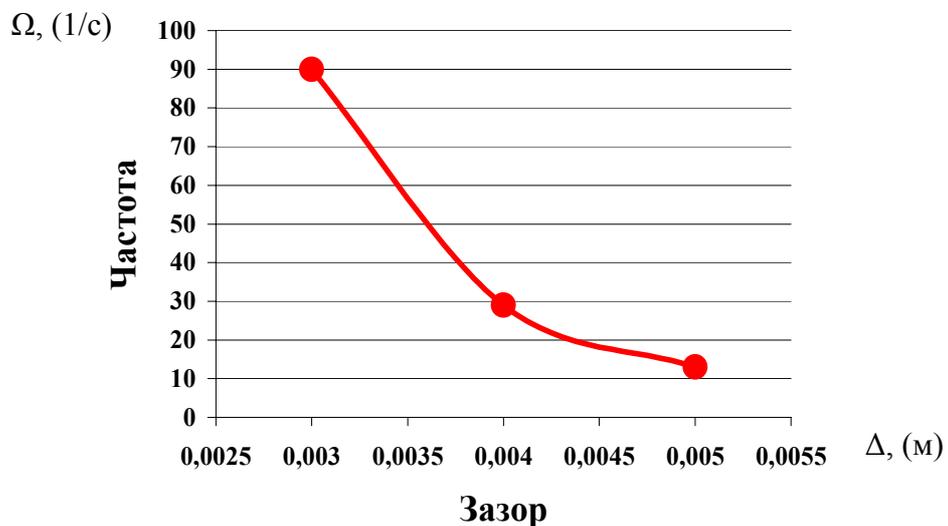


Рис.13. Зависимость предельной частоты от зазора.

Анализируя рис.10-12, можно сделать вывод, что для зазоров 0,003-0,004 существуют две области резонансных частот, в которых имеет место резкое увеличение средней скорости. Между этими частотами наблюдается значительный спад скорости, причем для зазора 0,003 скорость падает до нуля. В первом интервале частот средняя скорость принимает максимальные значения, однако, этот интервал

очень узкий. Второй интервал частот более широкий, но скорость здесь меньше.

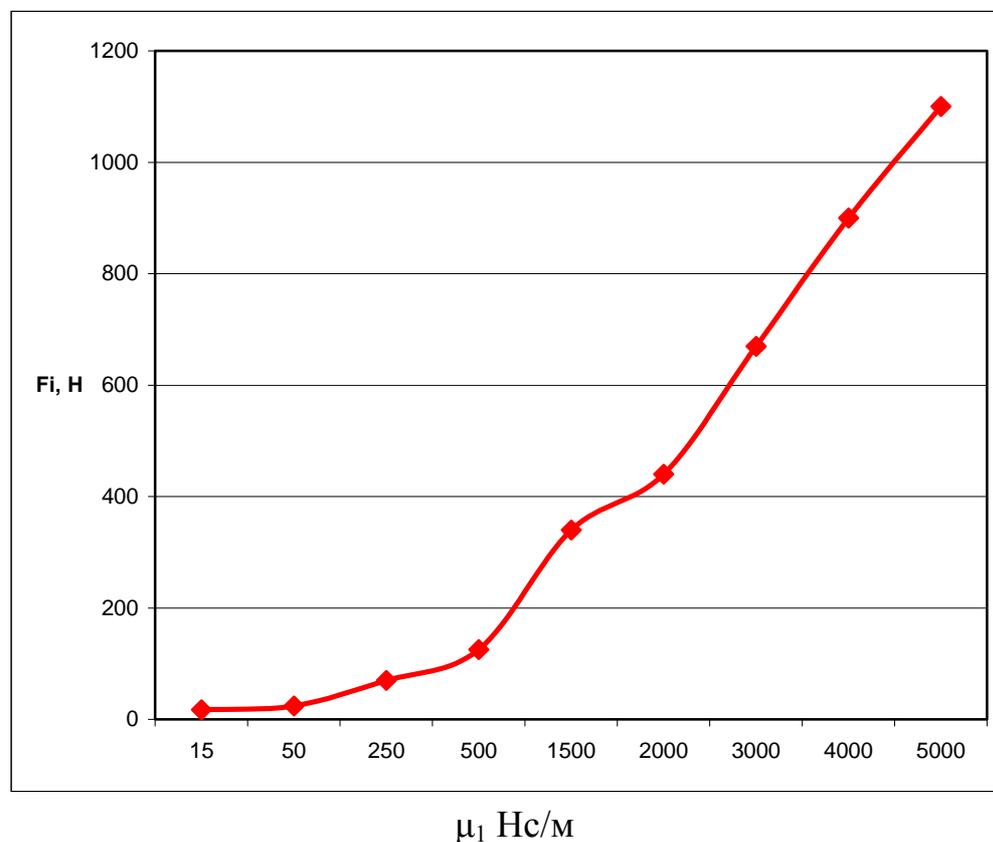


Рис. 14. Зависимость амплитуды силы инерции от вязкости ограничителя

Далее исследовалось влияние параметра ограничителя  $\mu_1$  на характер движения внутренней массы и корпуса робота. При этом параметр жесткости  $c_1 = 3000$  Н/м оставался неизменным, а значения вязкости ограничителя изменялись в диапазоне:  $\mu_1 = 15$  Нс/м;  $\mu_1 = 3000$  Нс/м.

Исследования показали, что с увеличением вязкости, время взаимодействия якоря с ограничителем уменьшается. При малой величине вязкости, якорь находится в зоне контакта долгое время, при большой - происходит только одно касание и якорь вылетает из зоны взаимодействия.

При этом мгновенное значение силы инерции увеличивается и увеличивается скорость робота. Кроме того, выявлено, что с ростом вязкости увеличивается амплитуда силы инерции (см. рис.14).

## **Заключение:**

1. Предложена принципиальная схема робота с электромагнитным приводом и внутренней подвижной массой, установленной на упругих элементах в корпусе робота и совершающей несимметричное движение
2. Разработана математическая модель системы, описывающая движение робота при подаче импульсного синусоидального электрического напряжения на электромагнит.
3. Установлено, что средняя скорость робота зависит от частоты подаваемого напряжения и величины зазора между магнитом и внутренней массой.
4. Выявлено влияние вязкости ограничителя на характер взаимодействия внутренней массы и корпуса робота.

Исследования выполнены при поддержке РФФИ грант 05-08-33382

## **Библиографический список**

1. Aoshima, S.; Tsujimura, T.; Yabuta, T.: A miniature mobile robot using piezo vibration for mobility in a thin tube, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* Vol. 115 (1993), pp. 270-278
2. Jatsun S., Safarov J. Vibrating engine for robots. *Proceedings. CLAWAR 2000. Madrid.*P.1016-1021.
3. Jatsun S., Jatsun S., Vorontsov R. Dynamics of vibrating robot for in pipe inspection *International Symposium – SYROM. – Bucharest, 2001.* 205-209.
4. Gradetsky, V.G.; Knyazkov, M.M.; Kravchuk, L.N.; Solovtsov, V.N.: *Microsensor control of motion of compact robots inside tubes (in Russian), Mikrosistemnaya Tekhnika [Microsystem Engineering], No. 8, 2002. P. 11–19*
5. Bolotnik N.N., Chernousko F.L., Kostin G.V., and Pfeiffer F. Regular motion of a tube-crawling robot in a curved tube, *Mechanics of Structures and Machines.* 2002. Vol. 30. No. 4. P. 431-462.
6. Zimmermann K., Zeidis I., and Pivovarov M. Dynamics of a nonlinear oscillator in consideration of non-symmetric Coulomb dry friction, *Fifth Euromech. Nonlinear Dynamics Conference. Book of Abstracts. Eindhoven Netherlands, August 7 12. 2005. P. 308*
7. Chernousko F., Zimmermann K., Bolotnik N., Yatsun S, Zeidis I. *Vibration –Driven Robots, The Workshop on Adaptive and Intelligent Robots: Present and Future. Proceedings. Vol.1 The Institute for problem in mechanics RAS. Moscow.2005, P.26-31*

8. Яцун С. Ф., Мищенко В. Я., Сафаров Д. И. Исследование движения двухмассового вибрационного робота // Известия вузов. Машиностроение. 2006. №5. с. 32-42.
9. Черноусько Ф. Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // Докл. РАН. 2005. Т.405. №1.с. 1-5.
10. Черноусько Ф. Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ. 2006. Т. 70.
11. Черноусько Ф. Л. Оптимальное прямолинейное движение двухмассовой системы // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1 с. 3-9.
12. Болотник Н. Н., Зейдис И. М., Циммерман К., Яцун С. Ф. Динамика управляемых движений вибрационных систем // Изв.РАН. ТиСУ. 2006. №5. с. 1-11.
13. Вибрации в технике. Т.4. Вибрационные процессы и машины: Справочник /Под ред. Э.Э. Лавенделла. - М.: Машиностроение, 1981.- 509 с.
14. Яцун С.Ф., Сафаров Д. И., Мищенко В. Я., Локтионова О. Г. «Вибрационные машины и технологии». Баку – «Элм», 2004.